Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Διδάσκων: Ιωάννης Γιαννούλης

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ IV

12 Φεβρουαρίου 2018

Θέμα 1. [1.5] Εστω οι συναρτήσεις $f_i : A \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, με $A = [0,1] \times [0,1]$ και

$$f_1(x,y) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases} \qquad f_2(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y, \\ 0, & x \neq y. \end{cases}$$

Να δικαιολογήσετε γιατί υπάρχουν ή γιατί δεν υπάρχουν τα ολοκληρώματα $\int_A f_i(x,y)\,d(x,y)$ και, αν υπάρχουν, να δώσετε την τιμή τους.

Θέμα 2. [0.5+0.5] Υπολογίστε τους όγκους

(α') του $N = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \pi/2,\ x^2 + y^2 \leq \cos z\}$,

(β') του $M \subset \mathbb{R}^3$, που περικλείεται από τα επίπεδα $0xy$, $0xz$, $0yz$, $x = 1$, $y = 1$ και την επιφάνεια $z = x^2 + y^4$.

Θέμα 3. [1+0.5] Έστω $\bar{g}(u,\nu) = (u^2 - \nu^2, 2u\nu)^T$ και έστω T το τμήμα του μοναδιαίου κυκλικού δίσκου με κέντρο την αρχή των αξόνων, το οποίο βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο.

(α') Βρείτε και σχεδιάστε το $\bar{g}(T)$.

(β') Υπολογίστε το εμβαδό του $\bar{g}(T)$.

Θέμα 4. [0.5+0.5] Υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα

(α') $\displaystyle\int_{\bar{\gamma}_1} \frac{1}{y^3}\,ds$ με $\bar{\gamma}_1(t) = (\ln t, t, 2)$, $t \in [1, e]$.

(β') $\displaystyle\int_{\bar{\gamma}_2} (\cos z, e^x, e^y) \cdot d(x,y,z)$ με $\bar{\gamma}_2(t) = (1, t, e^t)$, $t \in [0, 2]$.

Θέμα 5. [1+0.5]

(α') Έστω $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ με $\operatorname{div} \operatorname{grad} f = 0$ και $D \subset \mathbb{R}^2$ ένα C^1-κανονικό χωρίο. Δείξτε ότι

$$\int_{\partial D} \left(\frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot d(x,y) = 0.$$

(β') Εξετάστε αν το $\bar{f}(x,y) = (2x\cos y, -x^2 \sin y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, είναι πεδίο κλίσεων και, αν είναι, βρείτε ένα δυναμικό του.

Θέμα 6. *[1]* Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{\bar{\Phi}} \bar{f} \cdot \bar{n}\,d\sigma$ με

$$\bar{\Phi}(u,\nu) = (2\sin u, 3\cos u, \nu), \quad (u,\nu) \in [0, 2\pi] \times [0,1], \qquad \text{και} \qquad \bar{f}(x,y,z) = (x, y, z^2).$$

Θέμα 7. *[0.5+0.5+0.5]* Έστω $\alpha > 0$, $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0,\alpha],\ x^2 + y^2 \leq (\alpha - z)^2\}$, $\bar{n}$ το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο στο ∂V και $\bar{f}(x,y,z) = (-y + \sinh z, x + \cosh z, \ln(x^2 + y^2 + 1))^T$. Υπολογίστε

(α') το εμβαδό του ∂V,

(β') το ολοκλήρωμα $\int_{\partial V} \bar{f} \cdot \bar{n}\,d\sigma$, θεωρώντας ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα του Gauss,

(γ') για $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0,\alpha],\ x^2 + y^2 = (\alpha - z)^2\}$ το ολοκλήρωμα $\int_S \operatorname{curl} \bar{f} \cdot \bar{n}\,d\sigma$, θεωρώντας ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα του Stokes.

Θέμα 8. [1] Να δώσετε τους ορισμούς της κατά σημείο σύγκλισης και της ομοιόμορφης σύγκλισης μιας ακολουθίας $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, στην $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και να εξετάσετε αν η $f_n(x) = x^n/(n!)$, $x \in \mathbb{R}$, συγκλίνει κατά σημείο και/ή ομοιόμορφα, και, αν ναι, να δώσετε το αντίστοιχο όριο.

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!